Simulation

Comsol und Randwerte

Simulation

Comsol und Randwerte

Inhalt

Übersicht:

- Erste Schritte in Comsol
- Randwerte
- Anfangsrandwertprobleme
- Parametric Sweep

Simulation

Comsol und Randwerte

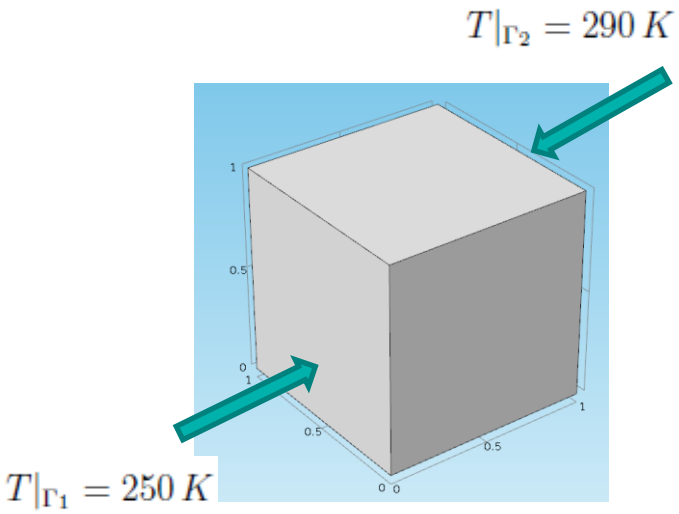
Comsol - Einführungsbeispiel

Wir wollen die stationäre Temperaturverteilung in einem Einheitswürfel berechnen.

Hierzu müssen wir zuerst den Versuchs-aufbau, d.h. die Bedingungen am Rand vorgeben…

Temperaturvorgabe vorne und hinten:

$$T|_{\Gamma_1} = 250\,K \quad \text{und} \quad T|_{\Gamma_2} = 290\,K$$



Isolation an den restlichen Randflächen.

Simulation

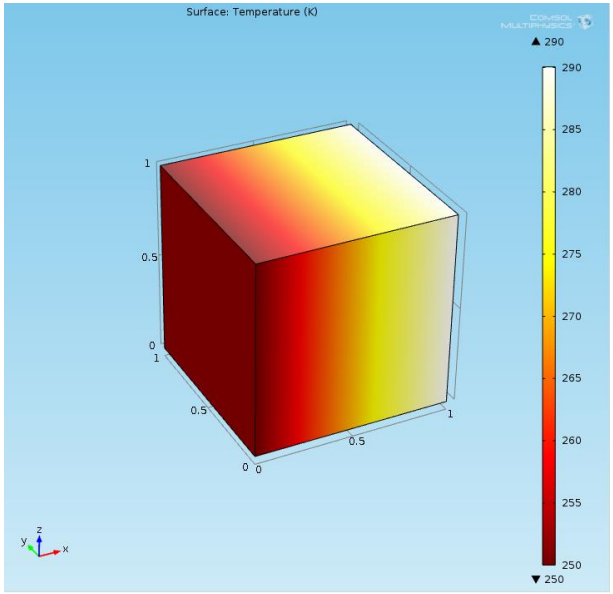
Comsol und Randwerte

Comsol - Einführungsbeispiel

Das Ergebnis sieht wie folgt aus…

Was stellen wir fest?

Die Temperaturverteilung ist symmetrisch zur Vorder- und Rückwand, wo wir die Temperaturen angelegt haben.



→ Eine 2D Simulation genügt!

Aufgabe:

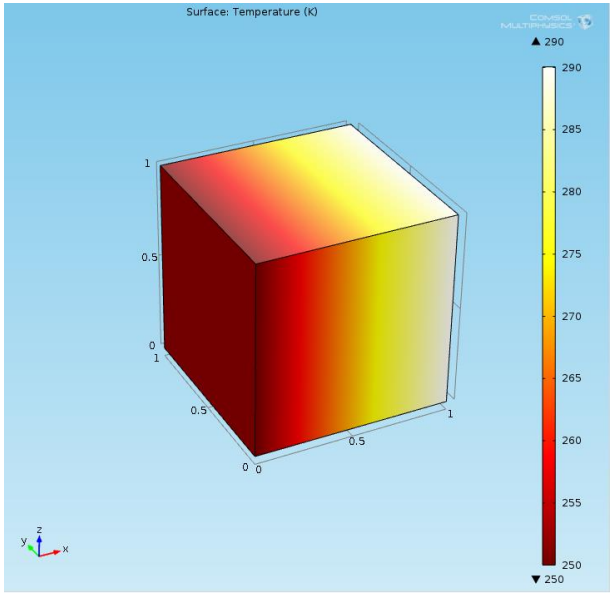
Erstellen sie eigenständig eine 2D Simulation. Vergleichen Sie die Ergebnisse miteinander.

Simulation

Comsol und Randwerte

Comsol - Einführungsbeispiel

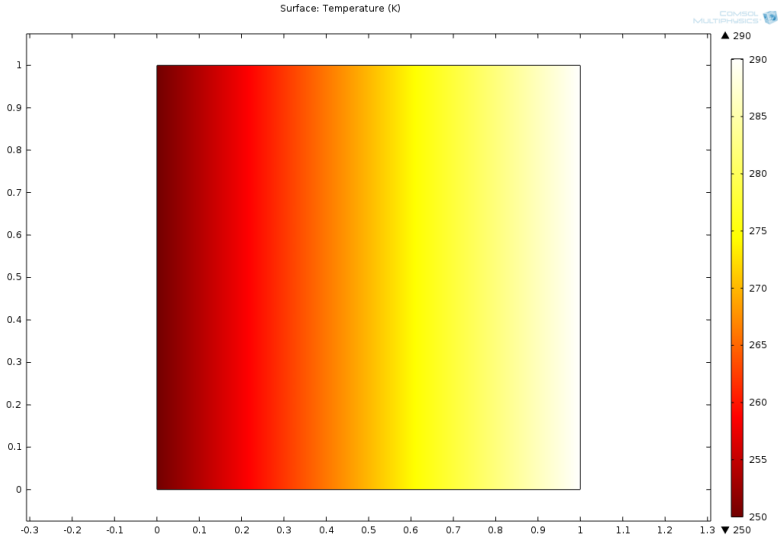
Wir vergleichen die 3D und 2D Simulationen miteinander und stellen fest, dass es tatsächlich ausreicht, eine 2D Simulation aufzustellen.



Allgemein gilt...

Um Rechenzeit einzusparen, ist es sinnvoll soweit wie möglich Symmetrien auszunutzen.

Eine volle 3D Simulation sollte nur dann aufgesetzt werden, wenn es sich nicht vermeiden lässt!



Hinweis:

Beim Beispiel hätte auch eine 1D Simulation ausgereicht!

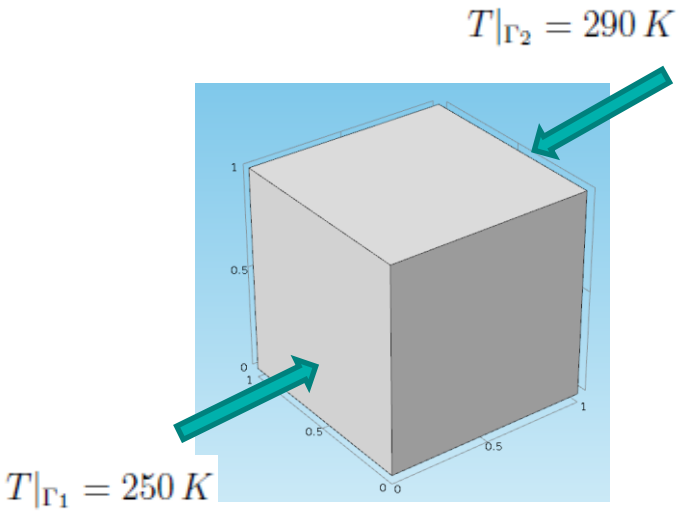
Simulation

Comsol und Randwerte

Randwertprobleme

Wie sieht die mathematische Beschreibung unseres Problems aus?

Was benötigen wir um das Experiment vollständig zu beschreiben?



Wärmeleitungsgleichung:

$$0 = \rho \cdot c_p \cdot \partial_t T(t,\vec{x}) = \mathrm{div}\left(\lambda \cdot \nabla T(t,\vec{x})\right)$$

(stationär)

Randbedingungen:

$$T\Big|_{\Gamma_1} = 250\ K$$

$$T\Big|_{\Gamma_2} = 290\ K$$

vorgeschriebene Randtemperaturen

$$\left.\frac{\partial T}{\partial \vec{n}}\right|_{\Gamma\setminus(\Gamma_1\cup\Gamma_2)} = 0$$

Isolierung

Simulation

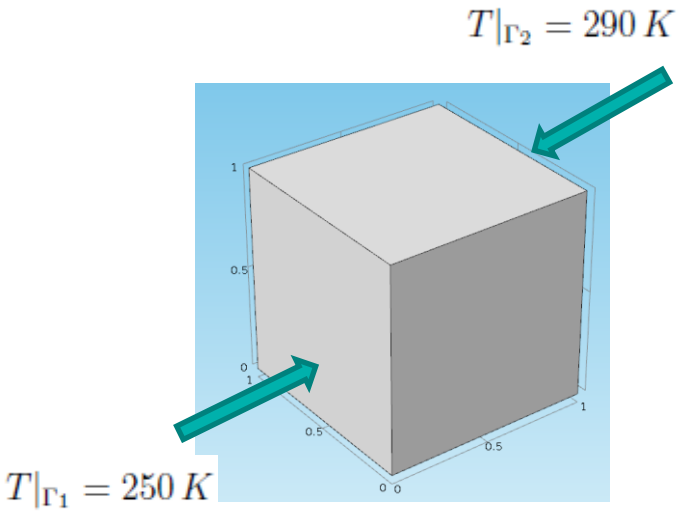
Comsol und Randwerte

Randwertprobleme

Mathematische Beschreibung als Randwertproblem…

$$\operatorname{div}\left(\lambda \cdot \nabla T(t,\vec{x})\right) = 0$$

$$\begin{cases} T\big|_{\Gamma_1} = 250\ K \\ T\big|_{\Gamma_2} = 290\ K \\ \left.\dfrac{\partial T}{\partial \vec{n}}\right|_{\Gamma\setminus(\Gamma_1\cup\Gamma_2)} = 0 \end{cases}$$



Merke:

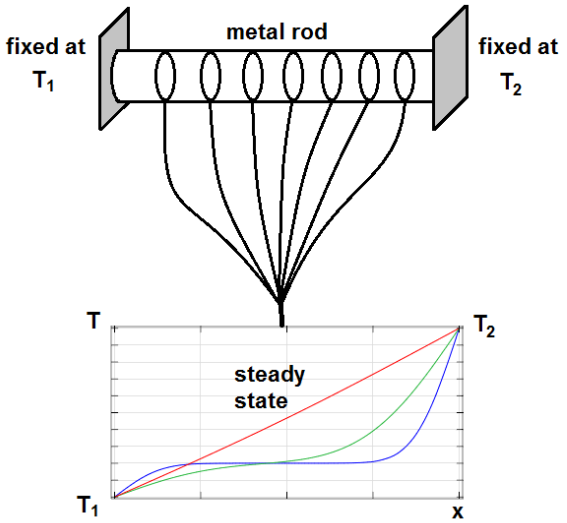
Für ein stationäres Problem benötigen wir die stationäre PDG, welche das Problem beschreibt und Radnbedingungen, welche Bedingungen an die Lösung am Rand des Rechengebietes vorschreiben.

Welche Arten von Randwerten gibt es?

Simulation

Comsol und Randwerte

Beispielexperiment



Wir betrachten Metallstab, der rundherum isoliert ist, außer an den Enden.

→ Wärmeleitung findet nur in x-Richtung statt (1D Problem)

Der Metallstab wird vor dem Experiment auf die feste Temperatur T_0 heruntergekühlt, sodass die Anfangs-temperatur beim Beginn des Experimentes T_0 beträgt.

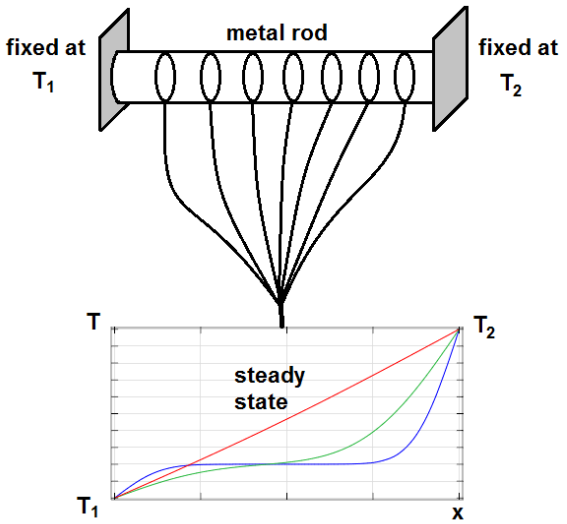
Zur Zeit $t = 0$ wird an den Ende ein Thermoelement angebracht, welches die Randtemperaturen links und rechts misst. Dieses Thermoelement wird zusätzlich mit einer Regelung gekoppelt, welche dafür sorgt, dass an den Enden stets die festen Temperaturen T_1 und T_2 anliegen.

Ab $t = 0$ wird der Temperaturverlauf im Metallstab aufgezeichnet.

Simulation

Comsol und Randwerte

Beispielexperiment



Wir beschreiben das Experiment mathematisch…

Da die Wärmeleitung nur in x-Richtung stattfindet, genügt es das Problem als 1D zu beschreiben.

Die zeitabhängige 1D Wärmeleitungsgleichung beschreibt die Temperaturleitung im Metallstab…

$$\rho \cdot c_p \cdot \partial_t T(t,\vec{x}) = \mathrm{div}\left(\lambda \cdot \nabla T(t,\vec{x})\right)$$

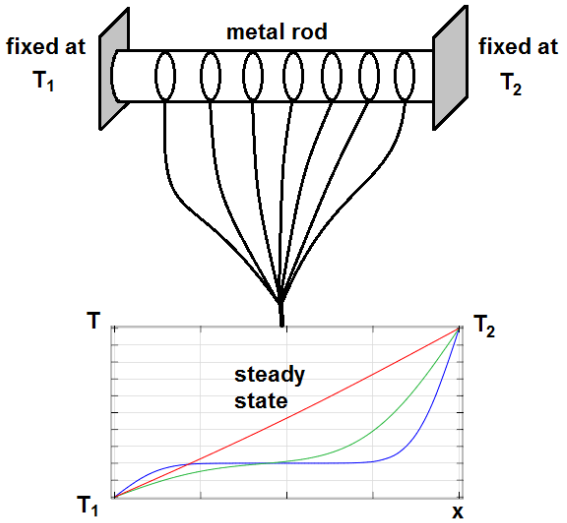
Vereinfachung, da die Wärmeleitfähigkeit λ nicht vom Ort abhängt:

$$\rho \cdot c_p \cdot \partial_t T(t,x) = \lambda \cdot \partial^2_{xx} T(t,x)$$

Simulation

Comsol und Randwerte

Beispielexperiment



Wir beschreiben das Experiment mathematisch…

Zu Beginn hat der Metallstab eine feste Anfangs-temperatur. Auch diese müssen wir mathematisch formulieren…

➡ Anfangsrandwertproblem

Wir haben zur Zeit $t = 0$ an allen Orten x die Tempertatur T_0…

➡ $T(t = 0, x) = T_0$

Bemerkung:

Wenn die Anfangstemperatur ortsabhängig ist, können wir auch folgends schreiben:

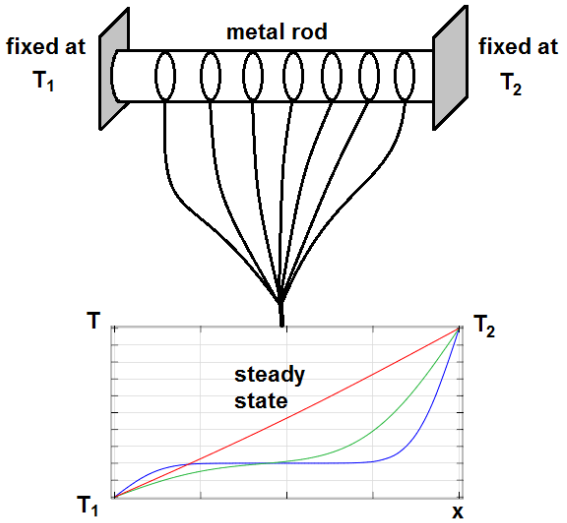
$$T(t = 0, x) = T_0(\mathrm{x})$$

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Simulation

Comsol und Randwerte

Beispielexperiment



Wir beschreiben das Experiment mathematisch…

Als nächstes müssen wir die Bedingungen am Rand beschrieben, d.h. die Randwerte mathematisch formulieren…

Da wir das Problem als 1D betrachten, brauchen wir die Isolierung, die um den Stab herum ist, nicht zu betrachten. Diese wird indirekt schon durch die Reduktion auf 1D berücksichtigt!

Wir haben die Temperaturen T_1 an der Stelle $x = 0$ und T_2 an der Stelle $x = L$…

$$T(t, x = 0) = T_1 \quad \text{und} \quad T(t, x = L) = T_2$$

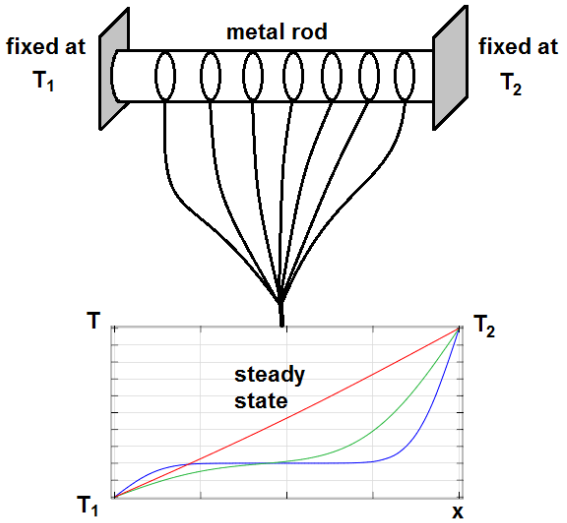
Simulation

Comsol und Randwerte

Beispielexperiment

Wir beschreiben das Experiment mathematisch…

Finale Formulierung als Anfangsrandwertproblem:



$$\rho \cdot c_p \cdot \partial_t T(t,x) = \lambda \cdot \partial_{xx}^2 T(t,x) \qquad \text{(PDG)}$$

$$\begin{cases} T(t, x = 0) = T_1 \\ T(t, x = L) = T_2 \end{cases} \qquad \text{(Randwerte)}$$

$$T(t = 0, x) = T_0 \qquad \text{(Anfangswert)}$$

Simulation

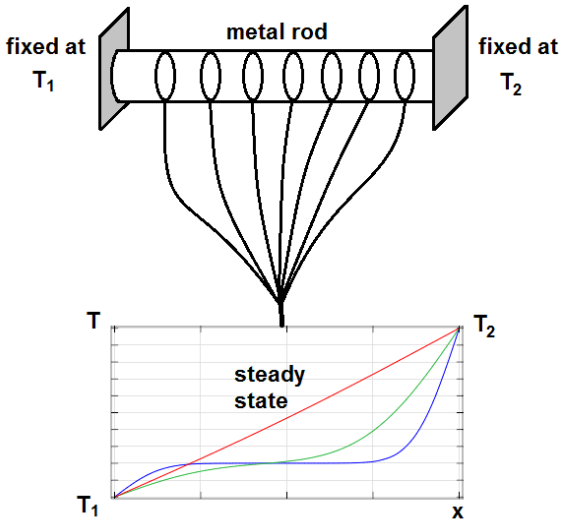
Comsol und Randwerte

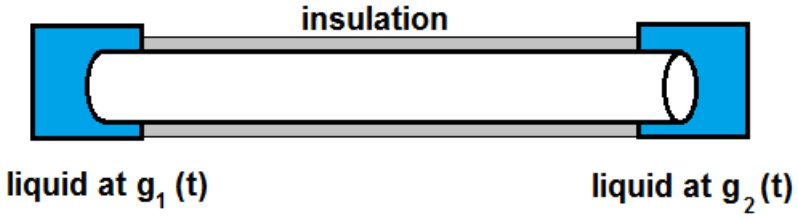
Beispielexperiment

Wir modifizieren die Randbedingungen beim Experiment…

Wir nehmen an, dass die Enden des Metallstabs jetzt in Kontakt mit einem Umgebungsmedium sind (z.B. Luft, oder eine Flüssigkeit).

Das Umgebungsmedium besitzt eine gewisse Temperatur, die sich auch mit der Zeit ändern kann.





Randbedingung:

$$\begin{cases} T(t, x = 0) = T_1 \\ T(t, x = L) = T_2 \end{cases}$$

???

Da die Temperatur nicht mehr konstant gehalten wird, ist die Beschreibung nicht mehr korrekt!

Simulation

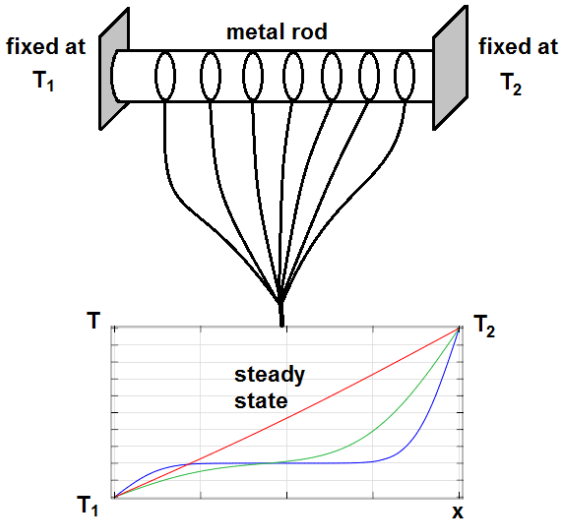
Comsol und Randwerte

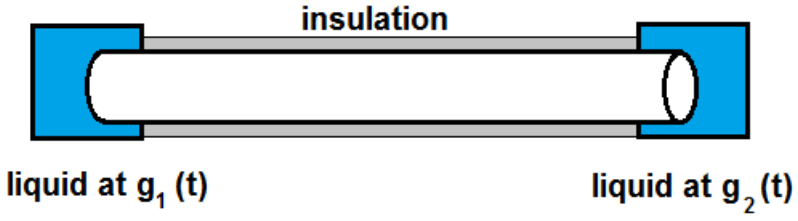
Beispielexperiment

Wir modifizieren die Randbedingungen beim Experiment…

Wir nehmen an, dass die Enden des Metallstabs jetzt in Kontakt mit einem Umgebungsmedium sind (z.B. Luft, oder eine Flüssigkeit).

Das Umgebungsmedium besitzt eine gewisse Temperatur, die sich auch mit der Zeit ändern kann.





Randbedingung:

Durch den Kontakt mit dem Medium entsteht ein Wärmefluss, der durch die Temperaturdifferenz zwischen Stab und Medium bestimmt wird…

$$-\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} = h \cdot \left(T\Big|_{\text{Rand}} - g_i\Big|_{\text{Rand}} \right)$$

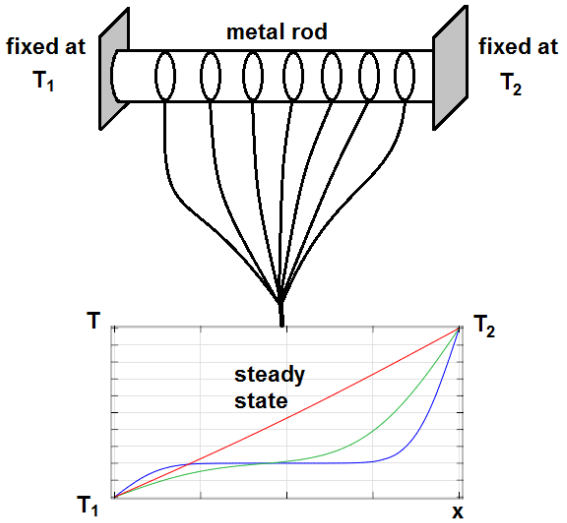
Simulation

Comsol und Randwerte

Beispielexperiment

Wir modifizieren die Randbedingungen beim Experiment…

Wenn der Wärmefluss am Rand nicht durch eine Temperaturdifferenz hervorgerufen wird, sondern konstant ist, erhalten wir eine weitere Art der Randbedingung…



$$\Rightarrow \quad -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} = q_0$$

Spezialfall Isolierung:

$$\Rightarrow \quad -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} = 0$$

Simulation

Comsol und Randwerte

Drei Arten von Randbedingungen

1. Art (Dirichlet Randbedingung):

Die Temperatur am Rand wird vorgeschrieben: $$T\Big|_{\text{Rand}} = T_0(t)$$

2. Art (Neumann Randbedingung):

Der Wärmefluss wird vorgeschrieben: $$-\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial \vec{n}}\Big|_{\text{Rand}} = q_0$$

Isolierung -> Wärmefluss = 0

3. Art (Robin Randbedingung):

Der Wärmefluss am Rand ergibt sich durch eine Temperaturdifferenz am Rand:

$$-\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial \vec{n}}\Big|_{\text{Rand}} = h \cdot \left(T\Big|_{\text{Rand}} - T_0\Big|_{\text{Rand}}\right)$$

Comsol und Randwerte

Comsol – Modifikation (Parametric Sweep)

Wir modifizieren das Experiment vom Anfang und betrachten die stationäre Wärmeverteilung im Einheitsquadrat…

Wir betrachten das folgende 2D Randwertproblem:

$$\lambda \cdot \partial_{xx}^2 T(x,y) = 0$$

$$\begin{cases} T(x=0,y) = 10°C \\ T(x=L,y) = 30°C \\ T(x,y=0) = T_0 \\ \partial_y T(x,y=L) = 0 \end{cases}$$

Aufgabe:

Machen Sie eine Skizze, in welche Sie die Randwerte eintragen.

Implementieren Sie das Ganze mit $T_0 = 20°C$ in Comsol.

Comsol und Randwerte

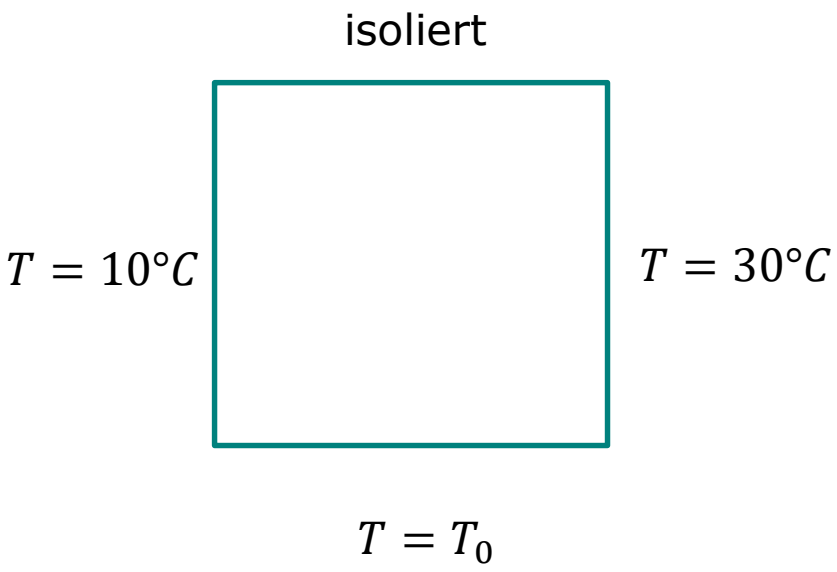
Comsol – Modifikation (Parametric Sweep)

Wir modifizieren das Experiment vom Anfang und betrachten die stationäre Wärmeverteilung im Einheitsquadrat…

Wir betrachten das folgende 2D Randwertproblem:

$$\lambda \cdot \partial_{xx}^2 T(x,y) = 0$$

$$\begin{cases} T(x=0,y) = 10°C \\ T(x=L,y) = 30°C \\ T(x,y=0) = T_0 \\ \partial_y T(x,y=L) = 0 \end{cases}$$



Comsol und Randwerte

Comsol – Modifikation (Parametric Sweep)

Wir modifizieren das Experiment vom Anfang und betrachten die stationäre Wärmeverteilung im Einheitsquadrat…

Wir betrachten das folgende 2D Randwertproblem:

$$\lambda \cdot \partial_{xx}^2 T(x,y) = 0$$

$$\begin{cases} T(x=0,y) = 10°C \\ T(x=L,y) = 30°C \\ T(x,y=0) = T_0 \\ \partial_y T(x,y=L) = 0 \end{cases}$$

Aufgabe:

Nutzen Sie einen Parametric Sweep um die Randtemperatur T_0 von 10°C bis 30°C in 5 K-Schritten zu variieren.

Vergleichen Sie die Ergebnisse!